

Aufgaben zum Verifizierungsprinzip

A Gegeben sei die Stammfunktion $F(x) = \int f(x)dx$. Berechnen Sie die Funktion $f(x) = F'(x)$!

	gegeben: $F(x) = \int f(x)dx$	gesucht: $f(x) = F'(x)$
A1	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	
A2	$x \ln x - x + C$	
A3	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$	
A4	$\ln \cos x + C$	

(1)

Lösungen zum Verifizierungsprinzip

A Gegeben sei die Stammfunktion $F(x) = \int f(x)dx$. Berechnen Sie die Funktion $f(x) = F'(x)$!

	gegeben: $F(x) = \int f(x)dx$	gesucht: $f(x) = F'(x)$
A1	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\frac{1}{x^2 - a^2}$
A2	$x \ln x - x + C$	$\ln x $
A3	$\frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$	$\cos^2 x$
A4	$\ln \cos x + C$	$-\tan x$

(2)

Anwendung von Grundintegralen

B Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$:

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
B1	$\sqrt{x}$		B2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
B3	$x\sqrt{x}$		B4	$\frac{x^5}{\sqrt{x}}$	
B5	$\frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$		B6	$\frac{x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}}$	

(3)

Lösungen zur Anwendung von Grundintegralen

B Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$,
überprüfen sie ihr Ergebnis, indem sie das Integral ableiten :

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$	
B1	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + C$	B2	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	$2x^{1/2} + C$	(4)
B3	$x\sqrt{x} = x^{3/2}$	$\frac{2}{5} x^{5/2} + C$	B4	$\frac{x^5}{\sqrt{x}} = x^{9/2}$	$\frac{2}{11} x^{11/2} + C$	

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$	
B5	$\frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{3}{x - 2}$	$\frac{1}{2} x^2 + x + 3 \ln x - 2 + C$	(5)
B6	$\frac{x^2 - x + 1}{x\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2} + x^{-3/2}$	$\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} - 2x^{-1/2} + C$	

Anwendung der Substitutionsmethode bei Grundintegralen

C Berechnen Sie das unbestimmte Integral zu folgenden Funktionen $f(x)$:

	geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$		geg.: $f(x)$	ges.: $\int f(x)dx$
C1	$(5x - 3)^2$		C2	$\sqrt{(3x - 2)^3}$	
C3	e^{-ax}		C4	$e^{cx + d}$	
C5	$\frac{1}{ax - b}$		C6	$x^2 \sqrt{2x^3 + 4}$	
C7	$\cos(\alpha x + \beta)$		C8	$x \ln x^2 + 4 $	

(6)

	geg.: $f(x)$	Substitution	ges.: $\int f(x)dx$
C1	$(5x - 3)^2$	$z = (5x - 3); dz = 5dx$	$\frac{1}{15} (5x - 3)^3 + C$
C2	$\sqrt{(3x - 2)^3}$	$z = 3x - 2; dz = 3dx$	$\frac{2}{15} (3x - 2)^{5/2} + C$
C3	e^{-ax}	$z = -ax; dz = -adx$	$-\frac{1}{a} e^{-ax} + C$
C4	$e^{cx + d}$	$z = cx + d; dz = cdx$	$\frac{1}{c} e^{cx + d} + C$
C5	$\frac{1}{ax - b}$	$z = ax - b; dz = adx$	$\frac{1}{a} \ln ax - b + C$
C6	$x^2 \sqrt{2x^3 + 4}$	$z = 2x^3 + 4; dz = 6x^2 dx$	$\frac{1}{9} (2x^3 + 4)^{3/2} + C$
C7	$\cos(\alpha x + \beta)$	$z = \alpha x + \beta; dz = \alpha dx$	$\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x + \beta) + C$
C8	$x \ln x^2 + 4 $	$z = x^2 + 4; dz = 2x dx$	$\frac{1}{2} (z \ln z - z) + C, (z = x^2 + 4)$

(7)

Anwendung der Substitutionsmethode in Verbindung mit der quadratischen Ergänzung

D1 In Integraltafeln finden Sie folgendes Integral: $I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ unter

Verwendung des Integrals I_1 mit Hilfe der Substitutionsmethode, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung einführen.

D2 In Integraltafeln finden Sie folgendes Integral: $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ unter

Verwendung des Integrals I_2 mit Hilfe der Substitutionsmethode, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung einführen.

**Anwendung der Substitutionsmethode
in Verbindung mit der quadratischen Ergänzung – Lösung**

$$\begin{aligned} \text{D1: } \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4}, \text{ Substitution: } z = x + 2, \frac{dz}{dx} = 1, dz = dx \\ &= \int \frac{dz}{z^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} + C = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D2: } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}}}, \text{ Subst.: } z = x - \frac{1}{2}, \frac{dz}{dx} = 1, dz = dx \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (\frac{3}{2})^2}} = \frac{2}{3} \arcsin \frac{2}{3} z + C = \frac{2}{3} \arcsin \frac{2x-1}{3} + C \end{aligned}$$